

# مدلسازی عددی فرآیند پخت تایر با استفاده از روش المان اجزای محدود

## N Numerical modeling of tire curing process using finite element method

### چکیده

در این پژوهش فرآیند پخت تایر با استفاده از روش المان محدود و برای یک مسئله انتقال حرارت متقارن مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش برای اولین بار خواص ماده به صورت تابعی از دما و همچنین نرخ پخت در نظر گرفته شده‌اند که این فرض باعث پیچیده‌تر شدن معادلات حاکم بر مسئله و دقیق تر شدن نتایج خواهد شد. در ادامه معادله دیفرانسیل مربوط به پخت تایر معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با استفاده از روش گلرکین ماتریس‌های جرم، دمپینگ و سختی یک مسئله انتقال حرارت متقارن، استخراج شده و با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه دوم پاسخ زمانی آن به دست آمده است. در نهایت نتایج مربوط به تحلیل‌های عددی صورت گرفته مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده از این پژوهش می‌تواند در تحلیل فرآیند پخت تایر سودمند بوده و اطلاعات مناسبی را برای طراحی تایر در اختیار مهندسين قرار دهد.

کلمات کلیدی: روش المان محدود، فرآیند پخت تایر، نرخ پخت

نوع مقاله: پژوهشی

عاطفه سلیمی<sup>۱</sup>، علی زرگری پور<sup>۲\*</sup>

- ۱- کارشناس طراح تایر شرکت تولیدی ایران تایر، تهران، ایران
- ۲- کارشناس مهندسی لاستیک شرکت تولیدی ایران تایر، تهران، ایران

ایمیل نویسندگان و عهده‌دار مکاتبات:

alizargaripoor@email.kntu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۱۲

مقدمه

مرحله‌ی پخت، آخرین مرحله از فرآیند تولید تایر است که در آن تایر خام که متشکل از لایه‌هایی با کامپاندهای مختلف، در پرس شکل می‌گیرد. در پرس حرارت از طریق قالب و بلادر از طریق گردش بخار، آب داغ و... به تایر خام منتقل می‌شود. حرارت منتقل شده به تایر سبب واکنش در کامپاندهای لاستیک شده که در نتیجه باعث تبدیل کامپاندها به حالتی مستحکم و الاستیک شده تا مورد نیاز عملکرد تایر باشند. در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در زمینه‌ی تحلیل عددی فرآیند پخت صورت گرفته است. آمبلانگ و همکاران [۱] با استفاده از روش تفاضل محدود به محاسبه نرخ پخت، با در نظر گرفتن ضریب رسانش ثابت، شرایط مرزی ثابت و همچنین نرخ تولید حرارت ثابت پرداختند. ویلیام و همکاران [۲] با در نظر گرفتن ضریب رسانش به صورت وابسته به دما به بهبود مدل ارائه شده توسط آمبلانگ پرداختند. قریشی و نادری [۳] به ارائه‌ی یک مدل المان محدود برای شبیه‌سازی فرآیند پخت در قالب پرداختند. همچنین قریشی و همکاران [۴] در پژوهشی دیگر به توسعه‌ی تکنیک شبیه‌سازی با کامپیوتر برای بهینه کردن تایم پخت یک لاستیک ضخیم با استفاده از روش المان محدود پرداختند. در این پژوهش با استفاده از روش المان محدود و با در نظر گرفتن خواص ماده به صورت تابعی از دما و نرخ پخت به مدل‌سازی عددی فرآیند پخت پرداخته و نتایج را با استفاده از کدنویسی در نرم‌افزار MATLAB به‌دست آمده است.

معادله انتقال حرارت

معادله انتقال حرارت پخت تایر را برای یک مسئله متقارن می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k_r \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - k_z \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - Q = 0 \quad (1)$$

که در آن  $Q$  منبع حرارتی داخلی،  $\rho$  چگالی ماده،  $c$  ضریب حرارتی ماده،  $k_r$  ضریب رسانش در راستای طولی و  $k_z$  ضریب رسانش در راستای عرضی می‌باشند. شرایط مرزی برای معادله (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(r, z) = T_a(r, z, t), \quad -k_r \frac{\partial T}{\partial r} n_r - k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = h(T - T_0) \quad (2)$$

که در آن  $T_a(r, z, t)$  تابع دما،  $h$  ضریب انتقال حرارت جابجایی،  $n_r$  و  $n_z$  بردارهای عمود بر مرز و  $T_0$  دمای محیط می‌باشند.

سینتیک واکنش پخت

در این قسمت یک تابع وابسته به دما معرفی خواهد شد که مقدار اندازه‌ی نرخ پخت  $C$  را توصیف می‌کند. برای لاستیک پخت نشده  $C = 0$  و برای لاستیک کاملاً پخته شده  $C = 1$  خواهد بود [۵]. در یک تابع تجربی برای فرآیند پخت همدمما و با در نظر گرفتن رفتار وابسته به دما ارائه شده است. این مدل یک فرآیند پخت برای حالت همدمما را نشان می‌دهد. در طول مدت پخت تایر در پرس، دما به آرامی افزایش می‌یابد و فرآیند را نمی‌توان همدمما فرض کرد. بنابراین می‌بایست مدلی را در نظر گرفت که نرخ پخت مورد را محاسبه قرار دهد.

$$\frac{dC}{dt} = kC^m (1-C)^n \quad (3)$$

که وابستگی به دما در فرایند پخت با استفاده از معادله زیر نشان داده می‌شود.

$$k = k_0 e^{\frac{E}{RT}} \quad (4)$$

که در آن  $R$  ثابت گاز ایده آل بوده و پارامترهای  $k_0$  و  $E$  از نتایج تجربی به‌دست می‌آیند. برای مثال پارامترهای استفاده شده در کامپاند ترد در جدول زیر لیست شده است. در اینجا فرض شده است که در ابتدای واکنش، یک مقدار اولیه‌ی کوچک برای درجه‌ی پخت وجود داشته باشد.

$$(c_0 = 0.0002)$$

جدول ۱ پارامترهای به کار رفته در کامپاند ترد.

$R$	$E$	$k_0$	$n$	$m$
8.3144598	98050.5806	1.473792e10	1.57	0.94

### خواص کامپاند لاستیک

خاصیت‌های معرفی شده در این پژوهش مثل ضریب رسانش حرارتی  $K$ ، چگالی ماده  $\rho$  و ضریب انتقال حرارتی ویژه  $C_p$ ، که در فرآیند پخت تاثیر نقش دارند را به صورت وابسته به دما و همچنین نرخ پخت تعریف می‌کنیم.

$$K(T) = a + bT, \rho(C) = (1-C)\rho_u + C\rho_c, c_p(T, C) = (1-C)c_{pu}(T) + C(c_{pc}(T)) \quad (5)$$

که در آن

$$c_{pu}(T) = a_u + b_u T, \quad c_{pc}(T) = a_c + b_c T \quad (6)$$

در معادلات بالا زیرنویس  $u$  نشان‌دهنده‌ی حالت پخت نشده  $C=0$  و زیرنویس  $c$  نشان‌دهنده‌ی حالت پخت کامل می‌باشند  $C=1$  همچنین پارامترهای  $a$  و  $b$  از نتایج تجربی به‌دست می‌آیند [۶].

روابط المان محدود برای یک مسئله متقارن انتقال حرارت فرم استاندارد معادلات در روش المان محدود به‌صورت زیر است

$$[M]\{\dot{T}\} + [C]\{T\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (7)$$

که در آن  $[M]$  ماتریس جرم،  $[C]$  ماتریس دمپینگ و  $[K]$  ماتریس سختی است.

در این جا با استفاده از روش گلرکین روابط المان محدود مربوط به مسئله متقارن انتقال حرارت را به دست می‌آوریم. بر اساس روش المان محدود دما را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب توابع شکل در دمای هر گره در نظر گرفت.

$$T = \sum_{i=1}^n N_i(r, z) T_i \quad (8)$$

در اینجا برای المان‌بندی مسئله از المان مثلثی سه گره‌ای

استفاده می‌شود که توابع شکل برای این المان به‌صورت زیر

تعریف می‌شوند:

$$N_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z), \quad \begin{cases} \alpha_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2 \\ \alpha_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3 \\ \alpha_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1 \end{cases} \begin{cases} \beta_1 = z_2 - z_3 \\ \beta_2 = z_3 - z_1 \\ \beta_3 = z_1 - z_2 \end{cases} \begin{cases} \gamma_1 = -r_2 + r_3 \\ \gamma_2 = -r_3 + r_1 \\ \gamma_3 = -r_1 + r_2 \end{cases} \quad (9)$$

و  $A$  مساحت المان است و  $A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}$

حال با جای‌گذاری رابطه (۸) در معادله انتقال حرارت (۱) و با ضرب دو طرف معادله در  $2\pi \iint N^T r dr dz$  ماتریس‌های جرم، سختی و نیرو به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$[C] = 2\pi \rho c \iint N^T N r dr dz, \quad [K] = -2\pi k_r \iint N^T \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} r dr dz - 2\pi k_z \iint N^T \frac{\partial N}{\partial r} dr dz \quad (10)$$

$$-2\pi k_z \iint N^T \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} r dr dz, \quad \{F\} = 2\pi \iint N^T Q r dr dz$$

الگوریتم حل پاسخ‌های زمانی به روش رانگ کوتاه مرتبه دوم به‌منظور حل دینامیکی مسئله به روش رانگ کوتاه مرتبه

دوم از روابط به فرم زیر استفاده می‌گردد:

$$\{\ddot{T}_{i+1}\} = \frac{4}{(\Delta t)^2} (\{T_{i+1}\} - \{T_i\}) - \Delta t \{\dot{T}_i\} - \{\ddot{T}_i\}, \quad \{\dot{T}_{i+1}\} = \frac{2}{\Delta t} (\{T_{i+1}\} - \{T_i\}) - \{\dot{T}_i\} \quad (11)$$

پس از به‌دست‌آوردن تمامی مقادیر گره زمانی بر حسب  $T_{i+1}$  در نهایت دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$[\tilde{K}]\{T_{i+1}\} = \{\tilde{F}\} \quad (12)$$

که در آن

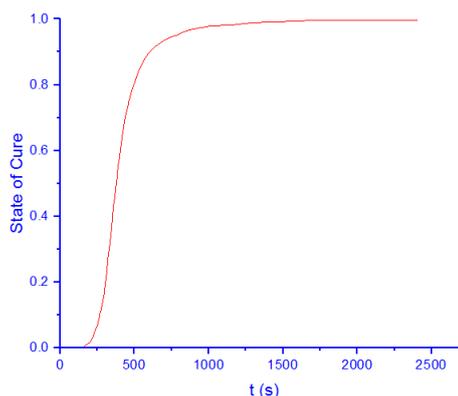
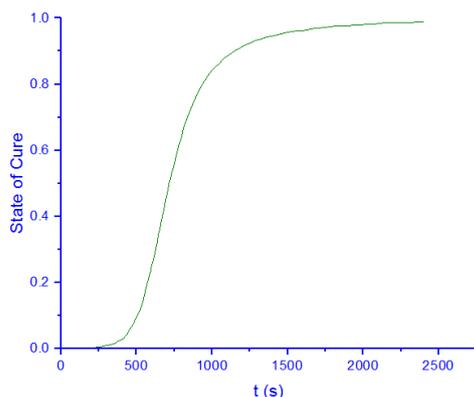
$$[\tilde{K}] = \left[ \frac{4[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{2[C]}{\Delta t} + [K] \right], \quad \{\tilde{F}\} = \left[ F \right] + \frac{4[M]}{(\Delta t)^2} (\{T_i\} + \Delta t \{\dot{T}_i\}) + [M]\{\ddot{T}_i\} + [C]\{\dot{T}_i\} + \frac{2[C]}{\Delta t} \{T_i\} \quad (13)$$

### نتایج

در این قسمت پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل (۳) برای دماهای مختلف و برای کامپاند ترد با توجه به مقادیر ارائه شده در جدول ۱ به‌دست می‌آید. همچنین در این قسمت نتایج حاصل از معادله (۱) برای یک استوانه‌ی با طول بی‌نهایت ارائه می‌شود. شکل (۱-۳) تغییرات درجه‌ی پخت (SOC) نسبت به زمان برای دماهای مختلف را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با افزایش دما میزان شیب نمودار یا همان نرخ پخت افزایش پیدا کرده و پخت با سرعت بیشتری صورت می‌گیرد. همچنین با افزایش دما زمان شروع پخت کاهش پیدا می‌کند.

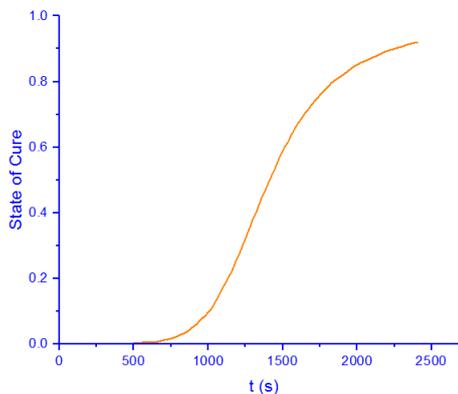
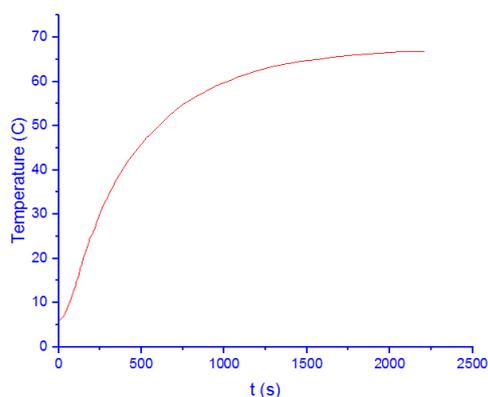
دارای دمای ثابت  $800^{\circ}C$  و مرز خارجی در معرض انتقال حرارت با محیط با ضریب انتقال حرارت جابجایی  $h = 150$  و دمای محیط  $T_0 = 20^{\circ}C$  است.

شکل ۴ نیز تغییرات دما نسبت به زمان برای نقطه‌ای روی مرز داخلی از یک استوانه‌ی بی‌نهایت برای نسبت ضریب رسانش  $k_r/k_z = 10$  را نشان می‌دهد. در این حالت شعاع‌های داخلی و خارجی استوانه  $0.3$  و  $0.45$  متر است. مرز داخلی استوانه



شکل ۲ تغییرات نرخ پخت برحسب زمان برای کامپاند ترد در دمای  $150^{\circ}C$

شکل ۱ تغییرات نرخ پخت برحسب زمان برای کامپاند ترد در دمای  $160^{\circ}C$



شکل ۴ تغییرات دما بر حسب زمان برای نسبت ضریب رسانش  $10$

شکل ۳ تغییرات نرخ پخت برحسب زمان برای کامپاند ترد در دمای  $140^{\circ}C$

### جمع‌بندی:

بالای این روش استفاده شده است. تغییرات نرخ پخت با زمان و همچنین تغییرات دما با زمان برای مسئله موردنظر به دست آمد که می‌تواند اطلاعات مفیدی را در جهت بهبود خواص کامپاندها برای رسیدن به نرخ پخت بهتر به دست دهد.

در این مقاله با در نظر گرفتن خواص ماده به صورت تابعی از دما و نرخ پخت، به تحلیل عددی فرآیند پخت پرداخته شد. برای مدل‌سازی عددی مسئله از روش المان محدود به دلیل دقت

## منابع

1. Ambelang J. , and Prentice G., “Digital method of calculating the flow of heat through a tire during vulcanization”, *Rubber Chem. Technol.*, 45(5), 1195-1201 (1972).
2. Prentice G. and Williams M., “Numerical evaluation of the state of cure in a vulcanizing rubber article”, *Rubber Chem. Technol.*, 53(5), 1023-1031 (1980).
3. Ghoreishy M., and Naderi G., “ Three-dimensional finite element modeling of rubber curing process. *Journal of Elastomers & Plastics “*, *J. Elastomers Plast.*, 37(1), 37-53 (2005).
4. Ghoreishy M., Rafei M., and Naderi G., “ Optimization of the vulcanization process of a thick rubber article using an advanced computer simulation technique “, *Rubber Chem. Technol.*, 85(4), 576-589 (2012).
5. Sourour S. and Kamal M., “Differential scanning calorimetry of epoxy cure: isothermal cure kinetics” *Thermochim. Acta*, 14(1-2), 41-59 (1976).
6. Han I.S., et al., “Dynamic simulation of the tire curing process”, *Tire Sci. Technol.*, 24(1), 50-76 (1996).

***IRM***

N

## Numerical modeling of tire curing process using finite element method

Atefeh Salimi<sup>1</sup>, Ali Zargaripour<sup>2\*</sup>

1- Tire Engineering Expert, Iran Tire Manufacturing Company

2- Tire Design Expert, Iran Tire Manufacturing Company

\*Corresponding author Email: alizargaripoor@email.kntu.ac.ir

### Abstract

In this paper, the tire curing process has been investigated using the finite element method for a symmetrical heat transfer problem. In this research, for the first time, the properties of the material are considered as a function of temperature and also the degree of cure, which assumption will make the governing equations of the problem more complicated and the results more accurate. In the following, the differential equation related to tire curing is introduced and analyzed. Also, the mass, damping and stiffness matrices of a symmetric heat transfer problem were extracted using the Glerkin method, and its time response was obtained using the second-order Runge-Kutta method. Finally, the results of numerical analyzes have been investigated. The results obtained from this research can be useful in analyzing the tire curing process and provide engineers with appropriate information for tire design.

Keywords : Finite element method, tire curing process, curing rate